30/10/2019

• ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ή ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΛΠΙΔΑ

μπορεί να είναι διάνυσμα είτε συνεχείς είτε διακριτό

Έστω $\underset{\sim}{X}=(X_1,\dots,X_n)$ n-διάστατο τ.δ. με σ.π. ή σ.π.π. έστω $f_X(x)$. Επιπλέον έστω $h(\underset{\sim}{X})$ μια συνάρτηση του τ.δ. $\underset{\sim}{X}$.
Η μέση τιμή $E(h(\underset{\sim}{X}))$ δίνεται από τη σχέση:

$$E(h(\underset{\sim}{X}))=\begin{cases}\int_{x_1}\dots\int_{x_n} h(\underset{\sim}{x})f_X(x)\,dx_n\dots dx_1 & , \underset{\sim}{X} \text{ συνεχής τ.δ.}\\ \sum_{x_1}\dots\sum_{x_n} h(\underset{\sim}{x})f_X(\underset{\sim}{x}) & , \underset{\sim}{X} \text{ διακριτό τ.δ.}\end{cases}$$

με την προϋπόθεση ότι το άθροισμα και το ολοκλήρωμα συγκλίνει απόλυτα.

• ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ (Covariance) δύο τ.μ. X και Y

Έστω X και Y δύο τ.μ. με $\mu_X=E(X)$ και $\mu_Y=E(Y)$.
Τότε η ποσότητα:

$$Cov(X,Y)=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

και δηλώνει τη συνδιασπορά, συμμεταβλητότητα, συνδιακύμανση.

Θ.δ.ο $\quad Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

Απόδειξη

$$Cov(X,Y)=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=E[XY-\mu_Y X-\mu_X Y+\mu_X\mu_Y]=$$

$$=E(XY)-E(\mu_X Y)-E(\mu_Y X)+\mu_X\mu_Y$$

$$=E(XY)-\cancel{\mu_X E(Y)}-\mu_Y E(X)+\cancel{\mu_X\mu_Y}=E(XY)-\mu_Y E(X)$$

$$=E(XY)-E(Y)E(X)$$

$$Cov(X,Y) = \begin{cases} \iint (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f_{XY}(x,y)\,dx\,dy & , X,Y \text{ συνεχής τ.μ.} \\ \\ \sum\sum (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f_{XY}(x,y) \end{cases}$$

$$E(XY) = \begin{cases} \iint xy\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy & (XY) \text{ συνεχής} \\ \\ \sum\sum xy\, f_{XY}(x,y) & (XY) \text{ διακριτό} \end{cases}$$

• ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

Η συνδιασπορά είναι ένα μέτρο της συμμεταβλητότητας των X και Y. Θα είναι θετική όταν οι ποσότητες $X-\mu_X$ και $Y-\mu_Y$ τείνουν να έχουν το ίδιο πρόσημο με μεγάλη πιθανότητα, ενώ θα είναι αρνητική όταν τείνουν να έχουν αντίθετο πρόσημο με μεγάλη πιθανότητα.

Η συνδιασπορά δυο τ.μ. X και Y έχει μονάδα μέτρησης το γινόμενο των 2 μονάδων μέτρησης της καθε μιας δηλαδή είναι απαλλαγμένη από μονάδες μέτρησης.

• ΟΡΙΣΜΟΣ: Συσχέτιση (Correlation) δύο τ.μ. X,Y

Ο συντελεστής συσχέτισης δυο τ.μ. X και Y συμβολίζεται ρ_{XY} ή $\rho(X,Y)$ ή απλά ρ και ορίζεται από τη σχέση:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$ καθαρος αριθμός.

• Ιδιότητες Συνδιακύμανσης

1) $Cov(X,X) = E(XX) - E(X)E(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = Var(X)$

2) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

3) Για οποιεσδήποτε δύο τ.μ. X και Y ισχύει ότι:
$Var(aX+bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab\, Cov(X,Y)$

Απόδειξη

$$Var(aX+bY) = E[(aX+bY)^2] - [E(aX+bY)]^2$$

$$= E[a^2X^2 + 2abXY + b^2Y^2] - [aE(X) + bE(Y)]^2$$

$$= a^2E(X^2) + 2abE(XY) + b^2E(Y^2) - a^2[E(X)]^2 - b^2[E(Y)]^2 - 2abE(X)E(Y)$$

$$= a^2[E(X^2) - [E(X)]^2] + b^2[E(Y^2) - [E(Y)]^2] + 2ab[E(XY) - E(X)E(Y)]$$

$$= a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab\, Cov(X,Y)$$

Πόρισμα

• Αν $a=b=1$ τότε:

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

• Αν $a=1$ $b=-1$ τότε:

$$Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$$

4) Αν X,Y δύο τ.μ. και $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ τότε:

$$Cov(\alpha X+\beta, \gamma Y+\delta) = \alpha\gamma\, Cov(X,Y)$$

Απόδειξη

$$Cov(\alpha X+\beta, \gamma Y+\delta) = E[(\alpha X+\beta)(\gamma Y+\delta)] - E(\alpha X+\beta)E(\gamma Y+\delta) =$$

$$= E[\alpha\gamma XY + \alpha\delta X + \beta\gamma Y + \beta\delta] - (\alpha E(X)+\beta)(\gamma E(Y)+\delta) =$$

$$= \alpha\gamma E(XY) + \cancel{\alpha\delta E(X)} + \cancel{\beta\gamma E(Y)} + \cancel{\beta\delta} - \alpha\gamma E(X)E(Y) - \cancel{\alpha\delta E(X)} + \cancel{\beta\gamma E(Y)} - \cancel{\beta\delta}$$

$$= \alpha\gamma[E(XY) - E(X)E(Y)] = \alpha\gamma\, Cov(X,Y).$$

5) $Cov(X+Y, Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$

6) Έστω $X_1,\dots,X_n$ τ.μ. και $Y_1,\dots Y_m$ τ.μ.
$\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\beta_1,\dots,\beta_m \in \mathbb{R}$

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Cov(X_i, Y_j)\cdot \alpha_i \beta_j$$

• Για τη Συσχέτιση : Ιδιότητες

1) Ο συντελεστής συσχέτισης ρ_{XY} λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[-1,1]$.

Απόδειξη.

Έστω X,Y δύο τ.μ. Θ.δ.ο. $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.

1ος Τρόπος

Θεωρώ τις τ.μ. $\frac{X}{\sigma_X} \pm \frac{Y}{\sigma_Y}$

Τότε $Var\left(\frac{X}{\sigma_X} \pm \frac{Y}{\sigma_Y}\right) \geq 0$

Όμως $Var\left(\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{\cancel{\sigma_X^2}} \cancel{Var(X)} + \frac{1}{\cancel{\sigma_Y^2}} \cancel{Var(Y)} + 2 \frac{1}{\sigma_X} \cdot \frac{1}{\sigma_Y} Cov(X,Y)$

$$= 2 + 2 \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = 2 + 2\rho_{XY} = 2(1+\rho_{XY}) \geq 0 \quad (1)$$

$Var\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{\cancel{\sigma_X^2}} \cancel{Var(X)} + \frac{1}{\cancel{\sigma_Y^2}} \cancel{Var(Y)} - 2 \frac{1}{\sigma_X} \cdot \frac{1}{\sigma_Y} Cov(X,Y)$

$$= 2 - 2 \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = 2(1-\rho_{XY}) \geq 0. \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Από (1)} & 1+\rho_{XY} \geq 0 \Rightarrow \rho_{XY} \geq -1 \\ \text{Από (2)} & 1-\rho_{XY} \geq 0 \Rightarrow \rho_{XY} \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$

(*) Εφαρμόζω τον τύπο $Var(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 Var(X) + \beta^2 Var(Y) \pm 2\alpha\beta\, Cov(X,Y)$

2ος Τρόπος

Ο 2ος τρόπος απόδειξης χρησιμοποιεί την ανισότητα Cauchy-Schwarz για τ.μ.

Έστω X, Y δύο τ.μ. με $E(X^2), E(Y^2) < \infty$

Τότε $(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$

Απόδειξη ανισότητας

Θεωρώ τη συνάρτηση $0 \leq h(t) = E((tX+Y)^2) =$

$= t^2 E(X^2) + 2tE(XY) + E(Y^2) \rightarrow$ πάντα θετικό τριώνυμο

$\Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow 4(E(XY))^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \leq 0 \Rightarrow (E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$

Αφού αποδείξαμε την ανισότητα συνεχίζουμε τον 2ο τρόπο απόδειξης. Εφαρμόζω την Cauchy-Schwarz για $X-\mu_X$ και $Y-\mu_Y$

Είναι: $\left[E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))\right]^2 \leq E\left[(X-\mu_X)^2\right] E\left[(Y-\mu_Y)^2\right]$

$\Rightarrow Cov^2(X,Y) \leq Var(X)Var(Y)$

$\Rightarrow \dfrac{Cov^2(X,Y)}{Var(X)Var(Y)} \leq 1 \Rightarrow \rho_{XY}^2 \leq 1$

2) i) Αν $\rho_{XY}=1$ τότε $\exists$ σταθερές $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha>0$ έτσι ώστε $Y=\alpha X+\beta$ και αντίστροφα.

ii) Αν $\rho_{XY}=-1$ τότε $\exists$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha<0$ έτσι ώστε $Y=\alpha X+\beta$ και αντίστροφα.

Απόδειξη 1ος Τρόπος

i) $(\Rightarrow)$ Αν $\rho_{XY}=1$ τότε $Var\left(\dfrac{X}{\sigma_X}-\dfrac{Y}{\sigma_Y}\right)=0 \Rightarrow \dfrac{X}{\sigma_X}-\dfrac{Y}{\sigma_Y}=C \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{X}{\sigma_X}-C=\dfrac{Y}{\sigma_Y} \Rightarrow Y=\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}X-C$ όπου $\alpha=\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ & $\beta=-C$

$(\Leftarrow)$ Έστω $Y=\alpha X+\beta$ τότε:

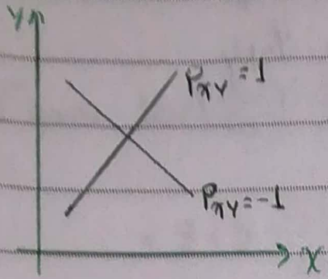
$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,\alpha X+\beta)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(\alpha X+\beta)}}=\dfrac{\alpha Cov(X,X)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{\alpha^2 Var(X)}}=1$

ii) $(\Rightarrow)$ Αν $\rho_{XY}=-1$ τότε $Var\left(\dfrac{X}{\sigma_X}+\dfrac{Y}{\sigma_Y}\right)=0 \Rightarrow \dfrac{X}{\sigma_X}+\dfrac{Y}{\sigma_Y}=C \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{Y}{\sigma_Y}=C-\dfrac{X}{\sigma_X} \Rightarrow Y=C-\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}X$ όπου $\alpha=-\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}<0$ $\beta=C$

$(\Leftarrow)$ $Y=\alpha X+\beta$ τότε: $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,\alpha X+\beta)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(\alpha X+\beta)}}=\dfrac{\alpha Cov(X,X)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{\alpha^2 Var(X)}}=$

$=\dfrac{\alpha \cancel{Var(X)}}{|\alpha|\cancel{Var(X)}}=-\dfrac{\alpha}{\alpha}=-1$



Ο συντελεστής συσχέτισης ελέγχει αν οι 2 μεταβλητές συνδέονται γραμμικά!!!
Αν π.χ. $\rho_{XY}=0$ αυτό δεν σημαίνει ότι δεν συνδέονται καθόλου οι μεταβλητές αλλά ότι δεν συνδέονται γραμμικά.

2ος Τρόπος

$\rho^2 \le 1$

Αυτό σημαίνει ότι όταν $\rho_{XY}=1$ ή $\rho_{XY}=-1$ η ανισότητα C-S ισχύει με ισότητα

Άρα $\exists\, t_0$ τ.ω. $h(t_0)=0 \Rightarrow E(|t_0X+Y|^2)=0$

Άρα $P(t_0X+Y=0)=1$

• Ροπές:

Έστω $\underset{\sim}{X}$ τ.δ. $\underset{\sim}{X}=(X_1,\dots,X_n)$. Η από κοινού απλή ροπή τάξης $k=(k_1,k_2,\dots,k_n)$ ορίζεται από τη σχέση:

$$E(X_1^{k_1}X_2^{k_2}\cdots X_n^{k_n})=\mu_{k_1k_2\dots k_n}$$

Ενώ η ροπή k-τάξης περί τη μέση τιμή:

$$E[(X_1-\mu_1)^{k_1}(X_2-\mu_2)^{k_2}\cdots(X_n-\mu_n)^{k_n}]=\lambda_{k_1\dots k_n}$$

• Χαρακτηριστικά (Βασικά) Πολυδιάστατων τ.μ. και κατανομών

Έστω λοιπόν n-διάστατο τ.δ. $\underset{\sim}{X}$

• $E(\underset{\sim}{X})=\mu=\begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$

↓

διάνυσμ. ΜΤ

• $$\Sigma = \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1,X_2) & \cdots & Cov(X_1,X_n) \\ Cov(X_2,X_1) & Var(X_2) & \cdots & Cov(X_2,X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ Cov(X_n,X_1) & Cov(X_n,X_2) & \cdots & Var(X_n) \end{pmatrix}$$ διαγώνια στοιχεία Var

Συμμετρικός πίνακας. Ονομάζεται πίνακας διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων.

Εκτός από τον πίνακα αυτόν υπάρχει και ο πίνακας συσχέτισης:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{X_1X_2} & \cdots & \rho_{X_1X_n} \\ \rho_{X_2X_1} & 1 & \cdots & \rho_{X_2X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{X_nX_1} & \rho_{X_nX_2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$ Συμμετρικός.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τον πίνακα Σ μπορώ πολύ εύκολα να βρω τον πίνακα R.

• ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω (X,Y) δισδιάστατη τ.μ. Τότε με την προϋπόθεση ότι οι μέσες τιμές υπάρχουν ισχύει:

$$E_{XY}[h(x,y)] = E_X[E_{Y|X}(h(x,y)|x)]$$

Απόδειξη

Για συνεχή τ.μ.

$m(x) = E(h(x,y)|x) = \int h(x,y) f_{Y|X}\, dy$

$E(m(x)) = \int m(x) \cdot f_X(x)\, dx = \iint h(x,y) \underbrace{f_{Y|X}\, f_X(x)}_{h} \,dx\, dy$

αυτό δίνει την από κοινού και η αποδ. τελείωσε.

• ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω (X, Y) δισδιάστατη τ.μ.

$$Var(X) = V(X) = E[V(X|Y)] + V[E(X|Y)]$$

Απόδειξη

$$E(V(X|Y)) = E[E(X^2|Y) - (E(X|Y))^2] = E[E(X^2|Y)] - E[(E(X|Y))^2] \quad (1)$$

$$V(E(X|Y)) = E[(E(X|Y))^2] - [E(E(Y|X))]^2 = E[(E(X|Y))^2] - (E(Y))^2 \quad (2)$$

Προσθέτω την (1) και την (2) και έχω το αποτέλεσμα.